

I PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

La notion de probabilité conditionnelle intervient quand pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, une information est fournie modifiant ainsi la probabilité d'un évènement.

1 DÉFINITION

Soient A et B deux évènements d'un même univers tel que $p(A) \neq 0$.

La probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé se note $p_A(B)$ et on a :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarque :

Si $p(B) \neq 0$ on définit de même $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

EXEMPLE

Une usine produit des articles en grande quantité, dont certains sont défectueux à cause de deux défauts possibles, un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage.

Une étude statistique a permis de constater que 12% des articles sont défectueux, 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage.

Un article choisi au hasard présente un défaut d'emballage. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi un défaut de fabrication ?

Notons :

A l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente un défaut de fabrication » ;

B l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente un défaut d'emballage » ;

Nous avons $p(A \cup B) = 0,12$, $p(A) = 0,06$ et $p(B) = 0,08$. Or

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad \text{d'où} \quad p(A \cap B) = 0,08 + 0,06 - 0,12 = 0,02$$

$$\text{Donc } p_B(A) = \frac{0,02}{0,08} = 0,25$$

Conclusion :

La probabilité qu'un article présente un défaut de fabrication **sachant** qu'il présente un défaut d'emballage est égale à 0,25.

On peut reformuler et dire :

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est égale à 0,25.

2 FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES

La relation définissant la probabilité conditionnelle peut s'écrire de la manière suivante

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$$

Cette écriture s'appelle la *formule des probabilités composées*

Propriété :

Soient A et B deux évènements d'un même univers tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors :

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$$

EXEMPLE

85 % d'une population est vaccinée contre une maladie.

On a constaté que **2% des individus vaccinés n'ont pas été immunisés contre cette maladie.**

Quelle est la probabilité qu'un individu soit vacciné et malade ?

Soit V l'évènement : « Un individu est vacciné » et M l'évènement : « Un individu est malade » ;

Nous avons $p(V) = 0,85$ et = 0,02.

La probabilité que parmi cette population, une personne soit vaccinée et malade est :

$$\begin{aligned} p(V \cap M) &= \dots \times p(V) \\ &= 0,02 \times 0,85 = 0,017 \end{aligned}$$

II FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES**1 CAS DE DEUX ÉVÈNEMENTS**

Si A est un évènement de Ω tel que $p(A) \neq 0$ et $p(A) \neq 1$, alors pour tout évènement B de Ω

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\bar{A}}(B) \times p(\bar{A})$$

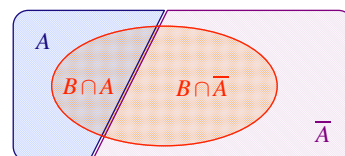
Preuve :

Les évènements $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ sont incompatibles et $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ d'où

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$$

D'après la formule des probabilités composées

$$p(B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\bar{A}}(B) \times p(\bar{A})$$

**2 CAS DE TROIS ÉVÈNEMENTS**

Si $\{A_1, A_2, A_3\}$ est une partition de Ω alors pour tout évènement B de Ω ,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \cap B)$$

EXEMPLE

Le parc informatique d'une entreprise est constitué d'ordinateurs de marques A, B ou C référencés au service de maintenance. 60% des ordinateurs sont de la marque A et parmi ceux-ci, 15 % sont des portables. 30 % des ordinateurs sont de la marque B et 20 % d'entre eux sont des portables. Les autres ordinateurs sont de la marque C et 50 % d'entre eux sont des portables.

On consulte au hasard la fiche d'un ordinateur, quelle est la probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable ?

Notons S l'évènement : « la fiche est celle d'un ordinateur portable »

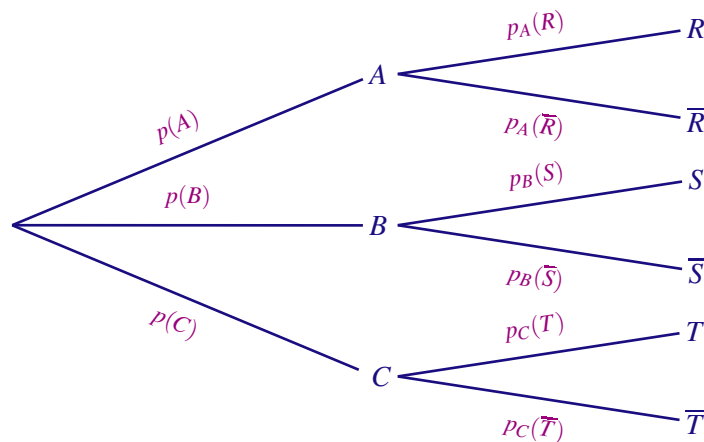
Les évènements A , B et C forment une partition de l'univers alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S) \\ &= p_A(S) \times p(A) + p_B(S) \times p(B) + p_C(S) \times p(C) \\ &= 0,15 \times 0,6 + 0,2 \times 0,3 + 0,5 \times 0,1 = 0,2 \end{aligned}$$

La probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable est 0,2.

III REPRÉSENTATION SOUS FORME D'UN ARBRE PONDÉRÉ

Une expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré dont chaque branche est affecté d'un poids qui est une probabilité.



- La racine de l'arbre est l'univers Ω
- Les évènements qui se trouvent aux extrémités des branches issues d'un même nœud forment une partition de l'évènement situé à ce nœud.
- Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'intersection des évènements qui le composent.
Par exemple, le chemin dont l'extrémité est R représente l'évènement $A \cap R$.
- Le poids d'une branche **primaire** est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.
Le poids d'une branche **secondaire** est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que l'évènement qui se trouve à son origine est réalisé.



Exercices n° 4 et 7 page 263 du manuel BTS CG collection Sigma.
Exercices n° 6 p 263 + n° 12, 14 et 16 p 265.
Exercices n° 17 et 19 p 266.